ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE
Estratto dai *Rendiconti*, Classe di Scienze — Vol. LXXXV — 1952.

UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA IDENTITÀ BIRAZIONALE DI DUE PIANI MULTIPLI

Nota di Carlo Felice Manara

ULRICO HOEPLI
Libraio dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

MILANO
1952

UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA IDENTITÀ BIRAZIONALE DI DUE PIANI MULTIPLI

Nota di Carlo Felice Manara

Presentata dal M. E. O. Chisini

(Adunanza del 20 dicembre 1951)

Sunto. — Si dimostra che due piani n-pli aventi la stessa curva di diramazione sono birazionalmente identici quando siano birazionalmente identiche le rette n-ple da essi subordinate su una retta generica.

§ I — Scopo del presente lavoro è la dimostrazione di una condizione sufficiente per la identità birazionale di due piani multipli dotati di una medesima curva di diramazione φ. È noto che esistono sull'argomento dei risultati fondamentali dovuti ad O. Chisini, il quale ha dimostrato [1] la identità birazionale di due piani multipli nella ipotesi che la curva comune di diramazione φ possa, variando con continuità, tendere in modo opportuno a determinate forme limiti.

È chiaro tuttavia che non sempre si può garantire il verificarsi di tale ipotesi; penso quindi non inutile stabilire altri criteri di identità birazionale di due piani multipli senza far ricorso alla variazione della curva di diramazione. In un mio recente lavoro [2] ho potuto ottenere lo scopo per i piani tripli; ora la proposizione che forma la base di quel risultato ha una portata molto più vasta del particolare problema ivi risolto. La riprendo pertanto qui per darne la dimostrazione in generale.

---

[1] Cfr. O. Chisini, *Sulla identità birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione,* Rend. Ist. Lomb. Vol. 77 (1943).

[2] Cfr. C. F. Manara, *Identità birazionale dei piani tripli aventi una stessa curva di diramazione.* Rend. Sem. Mat. di Modena (1951).

§ II - Sia assegnato un piano n-plo, cioè una relazione algebrica

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

che definisce la z come funzione algebrica $z(x, y)$ implicita ad n valori delle due variabili indipendenti x, y. Sia $\varphi(x, y) = 0$ la curva di diramazione che supporremo (come è sempre lecito) in posizione generica rispetto agli assi di riferimento e dotata di sole singolarità nodali e cuspidali; indichiamo con m l'ordine di φ.

Posto $x = x_0$ la (1) definisce una retta n-pla, cioè una funzione algebrica ad n valori della sola variabile y, i cui punti di diramazione sono dati dalle radici y_1, y_2, ... y_m della equazione

$$\varphi(x_0, y) = 0.$$

Conveniamo di stabilire, per ogni valore x_0 di x un sistema di cappi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ nel piano Π_y della variabile complessa $y = y_1 + i\, y_2$; cappi che vanno a circondare i punti y_1, y_2, ... y_m partendo da una determinata origine 0, nella quale abbiamo fissato i nomi delle determinazioni z_1, z_2, ... z_n della funzione $z(x, y)$. Per es. conveniamo di fissare la forma dei cappi γ_i ($i = 1, 2, \ldots m$) in modo che essi partano dal punto improprio dell'asse immaginario nel piano Π_y, dalla parte delle y_2 negative e vadano a circondare i punti y_i correndo parallelamente all'asse immaginario stesso.

Quando la variabile indipendente y percorre un cappio γ_i viene operato uno scambio S_i su una coppia di determinazioni della z, scambio che diremo brevemente « deposto », con le convenzioni fissate, sul corrispondente punto di φ circondato dal cappio γ.

Manifestamente, una volta fissata la forma dei cappi γ in Π_y (per es. come abbiamo descritto poco sopra), quando si varii con continuità il valore x_0, e quindi il gruppo di punti y_i, gli scambi generati da ogni singolo cappio vengono pure trasportati per continuità, rimanendo quindi inalterati fino a che non avvenga che un y_r traversi un cappio γ_s; con che lo scambio S'_s generato da tale cappio dopo l'attraversamento risulta essere il trasformato di S_s mediante S_r

$$S'_s = S_r\, S_s\, S_r^{-1}$$

È noto che sussistono per tali scambi delle fondamentali relazioni, che chiameremo « condizioni di Enriques » ([3]); in forza

([3]) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione*. Annali di Mat, 1924, di esse, detto $\bar{x}$ un valore di x in corrispondenza al quale coincidano due radici y_r ed y_s della equazione $\varphi(\bar{x}, y) = 0$, si ha per gli scambi corrispondenti S_r ed S_s la relazione

$$\text{(I)} \qquad S_r = S_s$$

se la retta $x = \bar{x}$ è tangente alla φ, la relazione

$$\text{(II)} \qquad S_r S_s = S_s S_r$$

se il valore $\bar{x}$ è ascissa di un nodo di φ, ed infine la relazione

$$\text{(III)} \qquad S_r S_s S_r = S_s S_r S_s$$

se $\bar{x}$ è ascissa di una cuspide di φ.

È facile constatare che la relazione (II) è soddisfatta quando S_r e S_s sono scambi operanti su coppie di elementi disgiunti, del tipo (12) (34), e che la (III) è soddisfatta quando S_r e S_s operano su coppie di elementi concatenati del tipo (12) (23). Diremo in tal caso che il nodo o la cuspide di φ in corrispondenza ai quali si hanno tali relazioni sono essenziali a φ stessa in quanto curva di diramazione; infatti queste singolarità si mantengono necessariamente quando φ venga a variare con continuità, sempre rimanendo di diramazione per un piano n-plo.

Ovviamente però le relazioni (II) e (III) sono soddisfatte anche se è $S_r = S_s$; diremo che in tal caso il nodo o la cuspide corrispondenti di φ sono inessenziali a φ stessa in quanto curva di diramazione; infatti tali singolarità possono esser sciolte variando la φ con continuità, senza che per ciò la φ stessa cessi di esser di diramazione per un piano n-plo.

Sussiste ora il

Teorema - Perché due piani n-pli diramati dalla stessa curva φ siano birazionalmente identici è necessario e sufficiente che siano birazionalmente identiche le rette n-ple da essi subordinate su una stessa retta generica del piano.

La necessità della condizione appare immediatamente in quanto se due funzioni $z(x, y)$ e $\zeta(x, y)$ sono birazionalmente identiche per valori indipendenti delle variabili x, y lo saranno anche quando tali variabili sono legate da una relazione lineare

$$ax + by + c = 0.$$

Viceversa, siano birazionalmente identiche le funzioni algebriche di una variabile subordinate da due funzioni $z(x, y)$ e $\zeta(x, y)$

su una stessa retta del piano, retta che supporremo in posizione generica rispetto alla curva φ.

Evidentemente, senza lesione della generalità, potremo sempre supporre che tale retta appartenga al fascio $x = \text{cost.}$ ed abbia precisamente l'equazione

$$x = \bar{x}.$$

Fissiamo ora per ogni valore x_0 di x nel piano Π_y della variabile complessa y un sistema di cappi γ_i che sia lo stesso per ambedue le funzioni z e ζ. Per ipotesi, possiamo scegliere i nomi delle determinazioni delle due funzioni in modo che, per il particolare valore $x_0 = \bar{x}$ gli scambi operati da ciascun cappio siano identici per ambedue le funzioni z e ζ. Allora essi risulteranno identici per ogni valore x_0 di x perchè, variando x_0 con continuità, le vicende a cui sono sottoposti gli scambi generati dai singoli cappi sono identiche per ambedue le funzioni.

Pertanto queste risultano possedere lo stesso gruppo di monodromia in tutto il piano x, y e di conseguenza risultano essere birazionalmente identiche.